

SISTEM BILANGAN REAL

Utk mempelajari matematika perlu memahami bahasan tentang sistem bilangan real, karena matematika didasarkan pada system bilangan real dan sifat- sifatnya. Sistem bilangan yg paling sederhana adalah **bilangan asli**, yaitu 1, 2, 3, ... Dengan menggunakan bilangan asli kita dapat menghitung banyaknya buku yang kita miliki, kendaraan yg melalui suatu jalan, orang2 yang berada dlm suatu ruang dan lain-lainnya.

Himpunan semua bilangan asli biasa dinotasikan dengan A. Jadi $A = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ Jika di dalam himpunan semua bilangan asli kita tambahkan semua negatifnya dan nol, maka diperoleh

Bilangan2 bulat, yaitu $\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$

Himpunan semua bilangan bulat biasa disimbolkan dengan B.

Jadi :

$$B = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

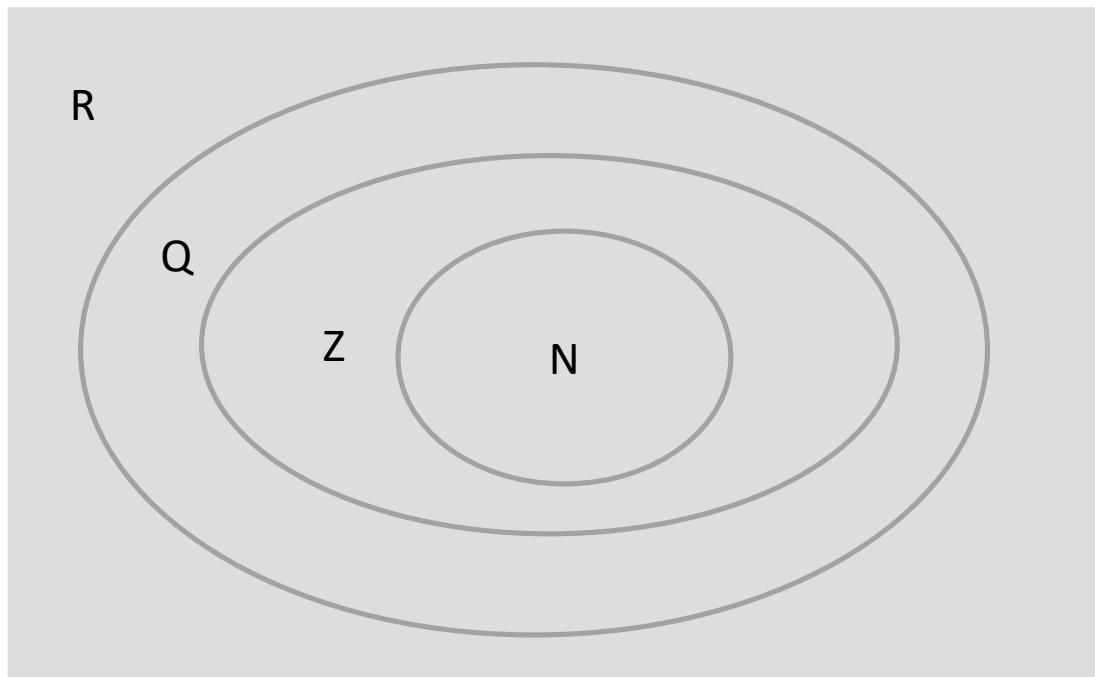
Selanjutnya untuk mengukur besaran2 seperti panjang, berat dan arus listrik maka bilangan bulat tidak memadai. Dalam hal ini bilangan bulat tdk dpt memberikan ketelitian yg cukup. Untuk keperluan ini maka dapat digunakan himpunan bilangan Rasional sebagai berikut :

$$Q = \{ a/b \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \}$$

Dengan menggunakan **bilangan irrasional** maka hal di atas tsb tdk menjadi masalah. Panjang sisi miring segitiga siku-siku tersebut adalah $\sqrt{2}$. Bilangan irrasional yg lain $3, \sqrt{5}, \sqrt[3]{7}, e$ dan π . Sekumpulan bilangan rasional dan irrasional beserta negatifnya dan nol **bilangan² real**. (bilangan nyata). Himpunan semua bilangan Real dinotasikan dengan R. Hubungan keempat himpunan A, B, Q, dan R dpt dinyatakan dengan

$$A \subset B \subset Q \subset R$$

dan digambarkan dengan diagram venn berikut.



$$N \subset Z \subset Q \subset R$$

Masih terdapat sistem bilangan yang lebih luas dari system bilangan real yaitu bilangan yg secara umum dapat dinyatakan dalam bentuk $a + b\sqrt{-1}$ dgn a dan b bilangan bulat atau $a + bi$ dengan $i = \sqrt{-1}$.

Bilangan demikian dinamakan **bilangan kompleks** dan himpunan semua bilangan kompleks dinotasikan dengan C . Dlm pelajaran ini bilangan kompleks tidak dibicarakan lebih lanjut karena aplikasinya untuk bidang ilmu yang khusus.

1. Operasi Bilangan

Pada R telah dikenal operasi *penjumlahan* dan *perkalian*. Misalkan x dan y bilangan real maka penjumlahan x dan y ditulis $x + y$ dan perkalian x dan y ditulis $x \cdot y$ atau secara singkat ditulis xy . Sifat-sifat operasi penjumlahan dan perkalian pada R adalah sebagai berikut :

- 1) Hukum komutatif: $x + y = y + x$ dan $xy = yx$.
- 2) Hukum asosiatif: $x + (y + z) = (x + y) + z$ dan $x(yz) = (xy)z$.
- 3) Hukum distributif: $x(y + z) = xy + xz$.
- 4) Elemen-elemen identitas:
 - Terhadap penjumlahan : 0 sebab $x + 0 = x$.
 - Terhadap perkalian: 1 sebab $x \cdot 1 = x$.

5) Invers (balikan):

Setiap bilangan real x mempunyai *invers aditif* (disebut juga *negatif*) $-x$ yang memenuhi $x + -x = 0$ dan setiap bilangan real x yang tidak nol mempunyai *invers multiplikatif* (disebut juga balikan) yaitu x^{-1} yang memenuhi $x \cdot x^{-1} = 1$.
Pengurangan dan *pembagian* didefinisikan dengan :

$$x - y = x + (-y)$$

$$x/y = x \cdot y^{-1}$$

2. Urutan

Bilangan-bilangan real bukan nol dibedakan menjadi dua himpunan terpisah yaitu bilangan-bilangan real positif dan bilangan-bilangan real negatif. Berdasarkan fakta ini diperkenalkan relasi *urutan* $<$ (dibaca “kurang dari”) yang didefinisikan dengan :

$x < y$ jika dan hanya jika $y - x$ positif

$x < y$ mempunyai arti yang sama dengan $y > x$.

3.Sifat-sifat urutan:

1) Trikotomi : Jika x dan y bilangan2 real maka pasti berlaku salah satu di antara yg berikut:

$$x < y \text{ atau } x = y \text{ atau } x > y.$$

2) Transitif : jika $x < y$ dan $y < z$ maka $x < z$.

3) Penambahan : $x < y \iff x + z < y + z$

4) Perkalian:

Jika z positif maka $x < y \iff xz < yz$

Jika z negatif maka $x < y \iff xz > yz$

Relasi *urutan* \leq (dibaca “kurang dari atau sama dengan”) didefinisikan dengan:

$x \leq y$ jika dan hanya jika $y - x$ positif atau nol.

Sifat-sifat ini adalah:

1) Transitif : jika $x \leq y$ dan $y \leq z$ maka $x \leq z$.

2) Penambahan : $x \leq y \iff x + z \leq y + z$

3) Perkalian : Jika z positif maka $x \leq y \iff xz \leq yz$

jika z negatif maka $x \leq y \iff xz \geq yz$

4. Pertidaksamaan

Pertidaksamaan merupakan kalimat terbuka yang menggunakan relasi $<$, $>$, \geq atau \leq .

Penyelesaian suatu pertidaksamaan adalah semua bilangan yg memenuhi pertidaksamaan tersebut yang biasanya merupakan interval atau gabungan interval- interval. Mengenai interval dapat dijelaskan sebagai berikut.

Interval terbuka (a,b) adalah himpunan semua bilangan real yang lebih besar dari a dan kurang dari b . Jadi $(a,b) = \{ x / a < x < b \}$. Sedangkan interval tertutup $[a,b]$ adalah himpunan semua bilangan real yang lebih besar atau sama dengan a dan kurang atau sama dengan b .

Jadi $[a,b] = \{ x / a \leq x \leq b \}$. Beberapa interval ditunjukkan dalam daftar berikut :



Penulisan Interval

(a,b)

$[a,b]$

$[a,b)$

$(a,b]$

$(-\infty, b)$

$(-\infty, b]$

$(a, -\infty)$

$(a, -\infty]$

$(-\infty, \infty)$

Penulisan Interval

$\{x < a < b\}$

$\{x \leq a \leq b\}$

$\{x \leq a < b\}$

$\{x < a \leq b\}$

$\{x < x < b\}$

$\{x < x \leq b\}$

$\{x < x < a\}$

$\{x < x \geq a\}$

\mathbb{R}

Dalam garis bilangan

$\overline{a \quad b}$

$\bullet \overline{a \quad b} \bullet$

$\overline{a \quad b}$
 \bullet at a

$\overline{a \quad b}$
 \bullet at b

$\overleftarrow{a \quad b} \bullet$

$\overleftarrow{a \quad b} \bullet$

$\overrightarrow{a \quad b}$

$\overline{a \quad b}$
 \bullet at a

$\overleftrightarrow{a \quad b}$

Contoh Pertidaksamaan

$$1) 2x - 7 < 4x - 2$$

$$2) -5 \leq 2x + 6 < 4$$

$$3) x^2 - x - 6 < 0$$

$$4) 3x^2 - x - 2 > 0$$

$$5) \frac{2x - 5}{x - 2} \leq 1$$

Contoh 1

Tentukan himpunan penyelesaian pertidaksamaan
 $2x - 7 < 4x - 2$.

Penyelesaian : $2x - 7 < 4x - 2$

$$\Leftrightarrow 2x - 7 + 7 < 4x - 2 + 7$$

$$\Leftrightarrow 2x < 4x + 5$$

$$\Leftrightarrow 2x - 4x < 4x - 4x + 5$$

$$\Leftrightarrow -2x < 5$$

$$\Leftrightarrow x > - 5/2$$

Hp : $\{x / x > - 5/2 \}$

Contoh 2

Tentukan himpunan penyelesaian pertidaksamaan

$$-5 \leq 2x + 6 < 4.$$

Penyelesaian : $-5 \leq 2x + 6 < 4$

$$\Leftrightarrow -5 - 6 \leq 2x + 6 - 6 < 4 - 6$$

$$\Leftrightarrow -11 \leq 2x < -2$$

$$\Leftrightarrow -11/2 \leq 2x/2 < -2/2$$

$$\Leftrightarrow -11/2 \leq x < -1$$

$$\text{Hp : } \{x / -11/2 \leq x < -1\}$$

Contoh 3 :

Tentukan himpunan penyelesaian pertidaksamaan :

$$3x - 5 \leq 1/2x + 1 < 16$$

Jawab : $3x - 5 \leq 1/2x + 1 < 16$

$$3x - 5 \leq 1/2x + 1$$

$$1/2x + 1 < 16$$

$$3x - 5 + 5 \leq 1/2x + 1 + 5$$

$$1/2x + 1 - 1 < 16 - 1$$

$$3x \leq 1/2x + 6$$

$$1/2x < 15$$

$$3x - \frac{1}{2}x \leq \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x + 6$$

$$x < 30$$

$$2 \frac{1}{2}x \leq 6 \Leftrightarrow 5x \leq 12$$

$$\Leftrightarrow x \leq 12/5$$

Himpunan penyelesaian : $\{x/x \leq 12/5\} \cap \{x/x < 30\}$

Himpunan penyelesaian : $\{x / x \leq 12/5 \}$

Contoh 4.

Tentukan himpunan penyelesaian pertidaksamaan

$$\frac{2x}{-x + 1} < 8$$

Jawab :

Kasus 1. : $-x + 1 > 0$, yaitu $x < 1$

$$2x < -8x + 8 \Leftrightarrow 2x + 8x < -8x + 8 + 8x$$

$$\Leftrightarrow 2x + 8x < 8$$

$$\Leftrightarrow 10x < 8$$

$$\Leftrightarrow x < 4/5$$

Himpunan penyelesaian kasus 1 adalah $= \{ x/ x < 1 \} \cap \{ x/ x < 4/5 \}$
 $= \{ x/ x < 4/5 \}$

Kasus 2. : $-x + 1 < 0$, yaitu $x > 1$

$$\begin{aligned} 2x > -8x + 8 &\Leftrightarrow 2x + 8 > -8x + 8 + 8x \\ &\Leftrightarrow 2x + 8x > 8 \Leftrightarrow 10x > 8 \\ &\Leftrightarrow x > 4/5 \end{aligned}$$

Himpunan penyelesaian kasus 1 adalah :

$$\{x/x > 1\} \cap \{x/x > 4/5\} = \{x/x > 1\}$$

Jadi himpunan penyelesaian pertidaksamaan :

$$\begin{array}{l} 2x \\ \text{-----} < 8 \\ -x + 1 \end{array} \text{ adalah } \{x/x < 4/5\} \cup \{x/x > 1\}$$

yaitu $\{x/x < 4/5 \text{ atau } x > 1\}$

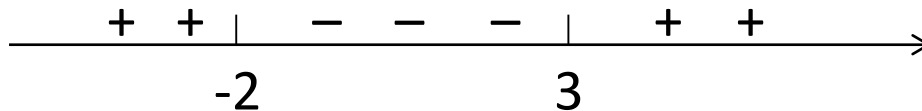
Contoh 3

Tentukan himpunan penyelesaian pertidaksamaan

$$x^2 - x - 6 < 0.$$

Penyelesaian: $x^2 - x - 6 < 0$

$$\Leftrightarrow (x - 3)(x + 2) < 0$$



$$\text{Hp} : \{x / -2 < x < 3\}$$

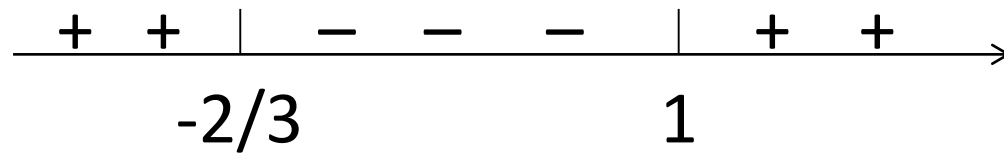
Contoh 4

Tentukan himpunan penyelesaian pertidaksamaan

$$3x^2 - x - 2 > 0$$

Penyelesaian : $3x^2 - x - 2 > 0$

$$\Leftrightarrow (x - 1)(3x + 2) > 0$$



$$\text{Hp} : \{x/x < -2/3 \text{ atau } x > 1 \}$$

Contoh 5

Tentukan himpunan penyelesaian pertidaksamaan : $\frac{2x - 5}{x - 2} \leq 1$

Penyelesaian :

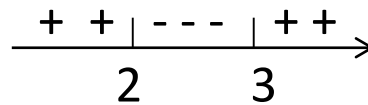
$$\frac{2x - 5}{x - 2} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x - 3}{x - 2} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x - 5}{x - 2} - 1 \leq 0$$

$$(x - 3)(x - 2) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x - 5 - (x - 2)}{x - 2} \leq 0$$



$$\text{HP : } \{ x / 2 < x \leq 3 \}$$

5.Nilai Mutlak

Konsep nilai mutlak sangat diperlukan untuk mempelajari matematika. Oleh karena pembaca yang ingin memahami betul konsep-konsep dalam matematika disarankan mempunyai ketrampilan dalam bekerja menggunakan nilai mutlak.

Definisi:

Nilai mutlak bilangan real x , ditulis $|x|$ didefinisikan dengan :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{jika } x \geq 0 \\ -x & \text{jika } x < 0 \end{cases}$$

Misal:

$$|5| = 5, \quad |-5| = -(-5) = 5, \quad 0 = 0$$

Sifat-sifat nilai mutlak

$$1) |ab| = |a| |b|$$

$$\frac{|a|}{|b|} = \frac{|a|}{|b|}$$

$$3) |a + b| \leq |a| + |b|$$

(ketidaksamaan segitiga)

$$4) |a - b| \geq |a| - |b|$$

6. Pertidaksamaan yang memuat nilai mutlak

Untuk menyelesaikan pertidaksamaan yg memuat nilai mutlak dapat digunakan teorema berikut :

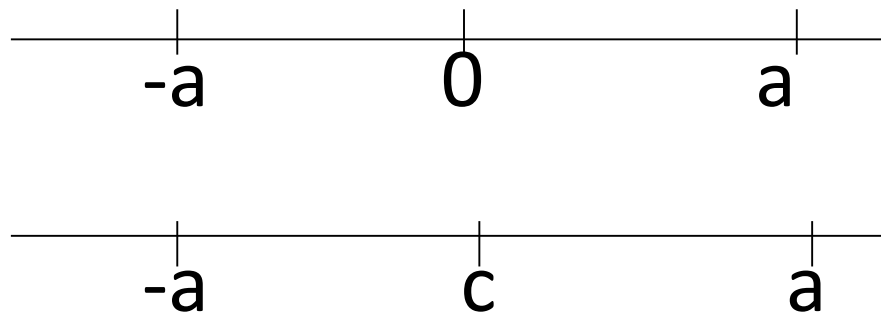
Teorema:

$$1. |x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$$

$$2. |x| > a \Leftrightarrow x < -a \text{ atau } x > a.$$

Secara fisis $|x|$ dapat menyatakan jarak x ke 0, sehingga x yang memenuhi $|x| < a$ menyatakan x yang jaraknya ke 0 kurang dari a .

Secara fisis $|x - c|$ dapat menyatakan jarak x ke c , sehingga x yang memenuhi $|x - c| < a$ menyatakan x yang jaraknya ke c kurang dari a .



Contoh 1

Tentukan penyelesaian $|x| < 3$.

Penyelesaian :

Nilai x yang memenuhi $-3 < x < 3$ merupakan penyelesaian pertidaksamaan $x < 3$

Contoh 2

Tentukan penyelesaian pertidaksamaan $|x - 2| < 3$.

Penyelesaian:

$$|x - 2| < 3 \iff -3 < x - 2 < 3$$

$$\iff -3 + 2 < x - 2 + 2 < 3 + 2$$

$$\iff -1 < x < 5$$

Jadi, penyelesaiannya adalah x yang memenuhi $-1 < x < 5$.

Contoh 3

Tentukan penyelesaian pertidaksamaan $|3x - 5| \geq 1$.

Penyelesaian :

$$|3x - 5| \geq 1 \Leftrightarrow 3x - 5 \geq -1 \text{ atau } 3x - 5 \geq 1$$

$$\Leftrightarrow 3x \leq 4 \text{ atau } 3x \geq 6$$

$$\Leftrightarrow x \leq 4/3 \text{ atau } x \geq 2$$

Jadi, penyelesaiannya adalah x yg memenuhi :

$$x \leq 4/3 \text{ atau } x \geq 2$$

PR (Tugas)

Tentukan himpunan penyelesaian pertidaksamaan berikut dan gambarkan himpunan penyelesaiannya pada garis bilangan.

1). $4x - 7 < 3x - 5$

2). $7x - 1 \leq 10x + 4$

3). $10x + 1 > 8x + 5$

4). $-6 < 2x + 3 < -1$

5). $2x - 4 \leq 6 - 7x \leq 3x + 6$

6). $x^2 - 5x + 6 > 0$

7). $|4x + 2| \geq 6$

8). $|x/2 + 7| > 2$

9. $\frac{x + 5}{2x - 1} \leq 0$

10. $\frac{2x - 3}{x + 1} > 0$

SEKIAN DAN TERIMA KASIH